Fondamenti di Linguaggi di Programmazione
Esercitazione in aula sui tipi

Esercizio 1
Definire il tipo del seguente termine

$$t = \textbf{rec}\ f.\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x))$$

Soluzione:
Applicando la regola di **rec** si ha che per un tipo appropriato τ,

$$\dfrac{f : \tau \qquad\qquad \lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau}{\textbf{rec}\ f.\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau}$$

Per la regole sulla funzioni λ, per appropriati tipi τ_1 e τ_2 si ha che

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{f : \tau_1 \to \tau_2 \equiv \tau} \qquad \dfrac{x : \tau_1 \qquad (\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau_2}{\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau_1 \to \tau_2 \equiv \tau}}{\textbf{rec}\ f.\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau}$$

Per la regole sulle coppie, per appropriati tipi τ_3 e τ_4 si ha che

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{f : \tau_1 \to \tau_2 \equiv \tau} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x : \tau_1} \qquad \dfrac{\lambda y.3 : \tau_3 \to \tau_4 \qquad (f\ x) : \tau_3}{(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau_4 \equiv \tau_2}}{\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau_1 \to \tau_2 \equiv \tau}}{\textbf{rec}\ f.\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau}$$

Siccome $\lambda y.3 : \tau_3 \to \tau_4$, per la regola di tipo sulle funzioni λ, si ha che y deve essere di tipo τ_3, e τ_4 di tipo **int**. Inoltre, ricordando che x é stato giá definito di tipo τ_1, dovendo $(f\ x)$ essere di tipo τ_3, per le regole di tipo delle coppie, f deve essere di tipo $\tau_1 \to \tau_3$. Dunque, applicando le relative regole per la funzione λ e la coppia $(f\ x)$ abbiamo che

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{f : \tau_1 \to \tau_2 \equiv \tau} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x : \tau_1} \qquad \dfrac{\dfrac{y : \tau_3 \quad 3 : \textbf{int}}{\lambda y.3 : \tau_3 \to \tau_4} \qquad \dfrac{f : \tau_1 \to \tau_3 \quad x : \tau_1}{(f\ x) : \tau_3}}{(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau_4 \equiv \tau_2 \equiv \textbf{int}}}{\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau_1 \to \tau_2 \equiv \tau}}{\textbf{rec}\ f.\lambda x.(\lambda y.3\ (f\ x)) : \tau}$$

Siccome abbiamo giá detto che $f : \tau_1 \to \tau_2$, allora $\tau_3 \equiv \tau_2 \equiv \textbf{int}$. In definitiva, abbiamo che $t : \tau_1 \to$ *int* dove $\tau_1 = type(x)$